



Sharif university of Technology
Graduate School of Management and Economics
(GSME)

Macroeconomics 1

HW 4

Mohammad Maghsoodi
401209577

Spring 2024

سوال ۲. الگوی نسل‌های هم‌پوش را در نظر بگیرید که در آن جوان‌ها به ماهی‌گیری مشغولند و مصرف هم در جوانی هم در کهنسالی اتفاق می‌افتد ولی کهنسالان قادر به کار کردن نیستند. جوان‌ها، سهم τ از ماهی‌های خود را به عنوان مالیات به دولت مرکزی پرداخت می‌کنند. دولت، مالیات را جمع‌آوری نموده و به هر کهنسال پرداخت انتقالی انجام می‌دهد تا مطمئن شود هیچ کهنسالی بدون غذا نمی‌ماند. تابع تولید ماهی برای جوان‌ها برابر An^α که در آن A بهره‌وری نیروی کار است. سرمایه (قایق) ثابت و برابر ۱ است. جوان‌ها می‌توانند بخشی از ماهی‌ها را برای پیری خود ذخیره نمایند البته هیچ بهره‌ای به آن تعلق نمی‌گیرد. مطلوبیت هر فرد برابر است با:

$$u(c_y, c_o, n) = \ln c_y + \ln c_o - n^2$$

که در آن مصارف جوانی و کهنسالی و خستگی کار کردن نقش دارند. رشد جمعیت را برابر با یک در نظر بگیرید.

الف) تعادل رقابتی را در این اقتصاد تعریف کنید. تمامی بخش‌های بهینه‌سازی و مساله‌ی دولت و تسویه‌ی بازارها را به دقت بنویسید.

ب) مقادیر مصرف جوانی و کهن‌سالی را به دست آورید.

ج) دولت می‌خواهد پرداختی به کهنسالان را افزایش دهد. برای این کار لازم است مالیات را زیاد کند. تابع درآمد دولت را بر حسب نرخ مالیات بدست آورده و نمودار آن را رسم کنید. بحث کنید که آیا ایده لفر در اینجا برقرار هست یا خیر.

د) با فرض نرخ رشد جمعیت به اندازه‌ی γ رابطه‌ی تسویه‌ی بازارها را مجدداً بنویسید.

الف) تعادل رقابتی در این اقتصاد، بر هم کنش و تعامل افراد پیر و جوان (به عبارتی مشابه بنگاه‌های تولیدی) در هر دوره زمانی است، به گونه‌ای که هر گروه بهترین تخصیص را برای خود انتخاب کرده و مطلوبیت خود را حداکثر می‌کنند. در هر دوره بازارهای مختلف نیز تسویه می‌شوند. چون نسل‌ها پیر و جوان به صورت متناوب تکرار می‌شوند، جواب‌های تعادلی مسئله برای تمامی نسل‌ها قابل تعمیم است. هر فرد در جوانی مسئله بهینه‌سازی خود را حل کرده و تخصیص‌های خود را جهت حداکثر سازی مطلوبیت خود تعیین می‌کند، با فرض اینکه تغییر جمعیت نداریم، متغیرهای مسئله را به صورت سرانه در نظر می‌گیریم:

$$\text{population growth} = \frac{n_y}{n_o} = G_p = 1$$

$$u(c_y, c_o, n) = \ln c_y + \ln c_o - n^2$$

مجموع مصرف در دوره جوانی و پس انداز، باید کمتر از باقی مانده تولید پس از مالیات باشد.

Maximization Problem:

$$\max_{\{n, c_y, s_y\}} u(c_y, c_o, n)$$

s.t.:

$$c_y + s_y \leq (1 - \tau)An^\alpha$$

$$c_o \leq g + s_y$$

mixed constraints :

$$c_y + c_y \leq (1 - \tau)An^\alpha + g = An^\alpha \Rightarrow \text{goods market clearing}$$

Government :

$$\tau An^\alpha = g$$

مصرف در دوره کهن سالی نیز باید کمتر از مجموع پس انداز و یارانه دولتی باشد، در این مسئله بهینه سازی چون شرایط کان تاکر برقرار است، دور ریز منابع نداریم، پس نامساوی ها به مساوی تبدیل می شوند. چون شرایط اینادا برقرار است، جواب گوشه ای $n=0$ نداریم.

(ب) حل مسئله با روش لاگرانژین:

$$[L]: \ln c_y + \ln c_o - n^2 + \lambda \{ (1-\tau)An^\alpha + g - c_y - c_o \}$$

$$\left. \begin{array}{l} [c_y]: \frac{1}{c_y} - \lambda = 0 \\ [c_o]: \frac{1}{c_o} - \lambda = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow c_o = c_y = \bar{c}$$

$$[n]: -2n + \lambda \alpha (1-\tau) A n^{\alpha-1} = 0 \Rightarrow \bar{c} = \frac{\alpha(1-\tau) A n^{\alpha-2}}{2}$$

$$[\lambda]: (1-\tau) A n^\alpha + g - c_y - c_o = 0 \Rightarrow \bar{c} = \frac{(1-\tau) A n^\alpha + g}{2}$$

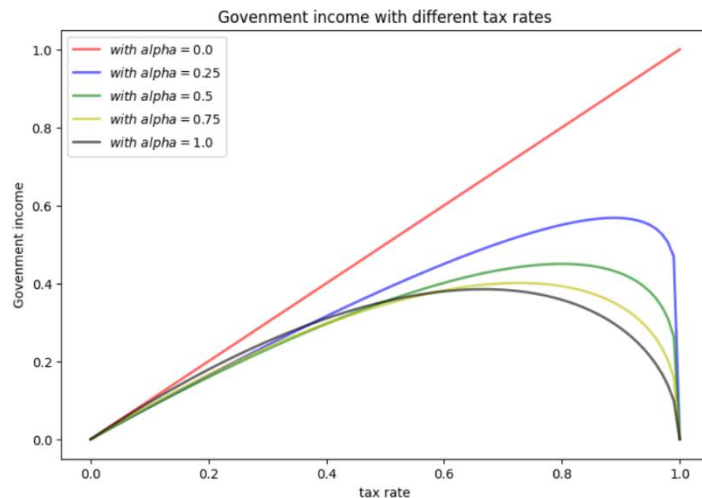
$$setting : g = \tau A n^\alpha \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\alpha(1-\tau)} = n \\ c_o = c_y = \bar{c} = \frac{A(\alpha(1-\tau))^{\frac{\alpha}{2}}}{2} \\ s_y = A(\alpha(1-\tau))^{\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{1}{2} - \tau \right] \end{array} \right.$$

(ج) در صورتی که مالیات تغییر کند، به دلیل اینکه عرضه نیروی کار با نرخ مالیات رابطه عکس دارد، در آمد قابل تصرف دولت کاهش می یابد، طبق روابط بالا، تابع درآمد دولت:

$$\left. \begin{array}{l} g = \tau A n^\alpha \\ \sqrt{\alpha(1-\tau)} = n \end{array} \right\} \Rightarrow g_G = \tau A [\alpha(1-\tau)]^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{dg_G}{d\tau} = 0 \Rightarrow \tau^* = \frac{2}{\alpha+2} \Rightarrow g_G^* = \frac{2A}{\alpha+2} \left[\frac{\alpha^2}{\alpha+2} \right]^{\frac{\alpha}{2}}$$

در شکل زیر، نمودار درآمد دولت در نرخ های مالیات متفاوت به ازای پارامتر های مختلف رسم شده است.



د) در صورتی که رشد جمعیت داشته باشیم، این رشد در تابع درآمد دولت و میزان یارانه و تسویه بازار کالا تاثیر گذاشته. البته در صورتی که به پس انداز افراد جوان نیز بهره تعلق گیرد، نرخ رشد جمعیت بر آن بهره نیز تاثیر گذار خواهد بود.

$$\text{population growth} = \frac{N_y}{N_o} = G_p = 1 + \gamma$$

$$\left. \begin{aligned} c_y + s_y &= (1 - \tau) A n^\alpha \\ c_o &= g + s_y \end{aligned} \right\}$$

$$\text{goods market clear} \rightarrow N_y c_y + N_o c_o = N_y (1 - \tau) A n^\alpha + N_o g = N_y A n^\alpha$$

$$\frac{N_y \tau A n^\alpha}{N_o} = (1 + \gamma) \tau A n^\alpha = g$$

سوال ۳. مدل نسل‌های هم‌پوش را با تابع مطلوبیت $(c_t^y + c_t^o)^{1/\sigma}$ در نظر بگیرید. میدانیم در شرایطی که پول کاغذی وجود داشته باشد، هزینه فرصت مصرف جوانی به کهنسالی همان نرخ بهره حقیقی است. فرض کنید هر نسل دارای موهبت یک واحد زمان کاری در جوانی‌اش است. در کهنسالی، نسل‌ها نمی‌توانند کار کنند و فقط مصرف‌کننده هستند. در این اقتصاد پول اولیه m به کهنسالان نسل اول داده شده است و در دوره‌های بعدی نیز یک دستگاه چاپ پول وجود دارد که با نرخ رشد ثابت η پول چاپ می‌کند یعنی داریم $M_t = (1 + \eta)M_{t-1}$. پول چاپ شده به صورت پرداخت انتقالی یکجا به کهنسالان داده می‌شود.

الف) تعادل رقابتی را تعریف کرده و شروط تسویه بازار پول و کالا را به دقت بنویسید.

ب) روابط تعادلی را بدست آورید. با توجه به تعداد معادلات و مجهولات، درباره‌ی برقراری قانون والراس بحث کنید. در نهایت تخصیص‌های تعادل مانا را بدست آورید.

ج) آیا این اقتصاد در شرایط قضیه اول رفاه صدق می‌کند؟

د) این بار فرض کنید پول چاپ شده به صورت نسبی در اختیار کهنسالان قرار بگیرد. یعنی به همان نسبتی که ذخیره‌ی پول داشته‌اند پول جدید به آن‌ها تعلق بگیرد. آیا تخصیص‌های چنین اقتصادی بهینه‌ی اول است؟ روابط تعادلی را بنویسید و این موضوع را بررسی کنید.

الف) تعادل رقابتی در این اقتصاد، بر هم کنش بین کهنسالان (نسل قبلی) و جوانان نسل در هر بازه زمانی است به گونه‌ای که هر گروه با توجه به قید منابع و بودجه خود، بهترین تخصیص‌های تعادلی را انتخاب کرده به گونه‌ای که مطلوبیت آنها حداکثر شود. در این سوال افراد در دوره جوانی خود کالا تولید کرده، بخشی از آن را مصرف کرده و بخشی از آن را به کهنسالان، فروخته و در ازای آن پول دریافت می‌کنند. این پول را به دوره بعد انتقال داده و در دوره بعد از جوانان نسل بعد کالا خریداری می‌کنند. همچنین در این اقتصاد در هر دوره بازارهای کالا و پول تسویه می‌شوند به طوری که عرضه محصولات (کالا) با تقاضای آن برابر شده و قیمت تعادلی محاسبه می‌شود، تسویه در بازار پول نیز به برابری تقاضای پول برای تراکنش‌ها و میزان عرضه پول (مجموع پول چاپ شده جدید و موجود قبلی) در اقتصاد است.

$$\max U = (c_t^y + c_{t+1}^o)^{\frac{1}{\sigma}}$$

s.t.:

$$[1]: P_t c_t^y + m_t \leq P_t y_t$$

$$[2]: P_{t+1} c_{t+1}^o \leq m_t + \eta M_t$$

Goods market :

$$c_t^y + c_t^o = y_t$$

Money Market :

$$P_t (y_t - c_t^y) = M_t$$

ب) قانون والراس در مورد تسویه بازارها در یک تعادل عمومی است. طبق این قانون یکی از قیدهای تعادل مازاد است و در صورتی که در یک اقتصاد، N-1 بازار تسویه شوند، بازار Nام نیز طبق تخصیص‌های بدست آمده تسویه خواهد شد. در این سوال، ۳ مجهول، مقادیر مصرف جوانی و کهن سال و میزان پس انداز جوانی را داریم، پس ۱ معادله اضافی است. تخصیص‌های تعادل مانا با حل مسئله بدست می‌آیند.

$$in ss: \begin{cases} c_{t+1}^o = c_t^o = \bar{c}^o \\ c_{t+1}^y = c_t^y = \bar{c}^y \end{cases}$$

$$\max U = (\bar{c}^y + \bar{c}^o)^{\frac{1}{\sigma}}$$

$$where: \bar{c}^y = \frac{P_t y_t - m_t}{P_t}, \bar{c}^o = \frac{m_t + \eta M_t}{P_{t+1}}$$

$$U = \left(\frac{P_t y_t - m_t}{P_t} + \frac{m_t + \eta M_t}{P_{t+1}} \right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

$$\frac{\delta U}{\delta m_t} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sigma} \left(-\frac{1}{P_t} + \frac{1}{P_{t+1}} \right) \left(\frac{P_t y_t - m_t}{P_t} + \frac{m_t + \eta M_t}{P_{t+1}} \right)^{\frac{1}{\sigma}-1} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{P_{t+1}}{P_t} = 1 \\ XOR \\ m_t = \frac{\frac{\eta M_t}{P_{t+1}} + y_t}{\left(\frac{1}{P_t} - \frac{1}{P_{t+1}} \right)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{c}^y = y_t - \frac{\frac{\eta M_t}{P_{t+1}} + y_t}{1 - \frac{P_t}{P_{t+1}}} = \frac{y_t(1 - \eta + \frac{(1 + \eta)}{\eta})}{(1 - \eta)} \\ \bar{c}^o = \frac{\frac{\eta M_t}{P_{t+1}} + y_t}{1 - \frac{P_t}{P_{t+1}}} = \frac{(1 + \eta)y_t}{\eta(1 - \eta)} \end{cases} \quad \eta > 0 \Rightarrow \bar{c}^y > \bar{c}^o$$

در صورتی که نرخ رشد قیمت ها صفر باشد، هرگونه تخصیص که $y_t^y + y_{t+1}^o = 1$ باشد یک تخصیص تعادلی است، اما در این قسمت چون افزایش حجم پول و در نتیجه تغییر سطح قیمت ها را داریم، همانطور که مشاهده می شود، مصرف در جوانی بیشتر از مصرف در کهن سالی است.

(ج) مسئله برنامه ریز مرکزی را نوشته و تخصیص های تعادلی آن را بدست می آوریم:

$$\max U = (\bar{c}^y + \bar{c}^o)^{\frac{1}{\sigma}}$$

s.t.:

$$\bar{c}^y + \bar{c}^o = y_t$$

$$[L]: (\bar{c}^y + \bar{c}^o)^{\frac{1}{\sigma}} + \theta \{y_t - \bar{c}^y - \bar{c}^o\}$$

$$\left. \begin{aligned} [\bar{c}^y]: \frac{1}{\sigma} (\bar{c}^y + \bar{c}^o)^{\frac{1}{\sigma}-1} - \theta &= 0 \\ [\bar{c}^o]: \frac{1}{\sigma} (\bar{c}^y + \bar{c}^o)^{\frac{1}{\sigma}-1} - \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{U'_{c_t^y}}{U'_{c_t^o}} = 1$$

مشاهده می‌شود که با توجه به فرم تابع مطلوبیت، به دلیل اینکه مطلوبیت حاشیه ای مصرف در دو دوران برابر است، تمامی حالاتی که $y_t^y + y_{t+1}^o = 1$ شوند، یک جواب بهینه برای مساله هستند!

(د) در حالتی که توزیع به صورت نسبی باشد، رابطه اوایلر مشابه برنامه ریز مرکزی بدست می‌آید. در این قسمت در صورتی که رشد قیمت ها برابر با رشد نقدینگی باشد، هرگونه تخصیص به صورت $y_t^y + y_{t+1}^o = 1$ یک تخصیص تعادلی است!

$$\max U = (c_t^y + c_{t+1}^o)^{\frac{1}{\sigma}}$$

s.t. :

$$[1]: P_t c_t^y + m_t \leq P_t y_t$$

$$[2]: P_{t+1} c_{t+1}^o \leq m_t (1 + \eta)$$

Goods market :

$$c_t^y + c_t^o = y_t$$

Money Market :

$$P_t (y_t - c_t^y) = M_t$$

$$[L]: (c_t^y + c_{t+1}^o)^{\frac{1}{\sigma}} + \lambda \{P_t y_t - P_t c_t^y - m_t\} + \gamma \{m_t (1 + \eta) - P_{t+1} c_{t+1}^o\}$$

$$\left[\begin{array}{l} [c_t^y]: \frac{1}{\sigma} (c_t^y + c_{t+1}^o)^{\frac{1}{\sigma}-1} - \lambda P_t = 0 \\ [c_{t+1}^o]: \frac{1}{\sigma} (c_t^y + c_{t+1}^o)^{\frac{1}{\sigma}-1} - \gamma P_{t+1} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{U'_{c_t^y}}{U'_{c_t^o}} = 1$$

$$[m_t]: -\lambda + (1 + \eta)\gamma = 0 \Rightarrow \frac{P_{t+1}}{P_t} = 1 + \eta$$

با توزیع نسبیتی پول، بخش حقیقی اقتصاد نسبت به نرخ رشد پول اثری نمی‌پذیرد چون توزیع پول به گونه ایست که در نسبت دارایی‌ها اخلاقی ایجاد نمی‌کند و ارزش نسبی آنها را تغییر نمی‌دهد. در مقابل، توزیع یکجای پول در قسمت ب) موجب می‌شود تا نسبت دارایی‌ها تغییر کرده و لذا مصرف در جوانی به کهنسالی به اندازه نرخ رشد پول بیشتر خواهد شد.

سوال ۴. اقتصادی را در نظر بگیرید که در آن نسل‌ها دو دوره زندگی می‌کنند و جمعیت در دوره‌های مختلف ثابت است. تابع مطلوبیت افرادی که در دوره t متولد شده‌اند به این شکل است:

$$U_t = \ln c_t^y + \frac{1}{1+\rho} \ln c_{t+1}^o$$

که در آن $\rho > -1$. افراد در جوانی یک واحد کار می‌کنند و درآمدشان برابر دستمزدی است که از کار بدست می‌آورند. افراد پیر توانایی کار ندارند و مصرفشان از طریق پس‌اندازی که در جوانی داشته‌اند تامین مالی می‌شود (یا در قالب سرمایه‌گذاری و در صورت وجود اوراق دولتی در قالب سرمایه‌گذاری و خرید اوراق دولتی). تابع تولید بنگاه i نیز به این شکل است:

$$Y_t^i = A(K_t^i)^\alpha (K_t N_t^i)^{1-\alpha}$$

که در آن $A > 0$ و K تمام سرمایه‌ی موجود در اقتصاد است. همچنین K^i و N^i به ترتیب میزان سرمایه و نیروی کار استفاده شده به وسیله‌ی بنگاه i هستند. از آنجا که فرض شده رشد جمعیت صفر است می‌توان فرض کرد عرضه کل نیروی کار برابر با ۱ است. بازار عوامل تولید رقابتی بوده و در نتیجه به هریک از عوامل به اندازه‌ی تولید حاشیه‌ای‌شان یعنی r و w پاداش داده می‌شود. دولت یک سیستم تامین اجتماعی تحت عنوان pay-as-you-go به جامعه معرفی می‌کند که در آن در هر دوره مبلغ d را از جوانان می‌گیرد و به کهنسالان پرداخت می‌کند.

(الف) نشان دهید مقدار r_t مستقل از میزان سرمایه بوده و همچنین $w_t = (1-\alpha)AK_t$.

(ب) مقادیر تعادلی پس‌انداز و سرمایه‌گذاری را بدست آورید.

(ج) حالا فرض کنید در دوره t دولت تصمیم می‌گیرد این سیستم تامین اجتماعی را منحل کند و اعلام کند که در دوره t کهنسالان مبلغ d را دریافت خواهند کرد اما جوانان تنها مبلغ γd را به کهنسالان می‌دهند که $0 \leq \gamma \leq 1$ و مبلغ $(1-\gamma)d$ توسط دولت به وسیله‌ی انتشار اوراق قرضه تامین می‌شود. از دوره‌ی $t+1$ دیگر جوانان مبلغی برای کمک به کهنسالان اهدا نمی‌کنند و دولت برای کمک به کهنسالان بدهی خود را در همان سطح $(1-\gamma)d$ نگه می‌دارد و بهره‌ی بدهی را از طریق یک مالیات یکجا بر دستمزد جوانان تامین می‌کند. برای حالت $\gamma = 0$ با فرض ثابت بودن دستمزد و نرخ بهره، تاثیر این تصمیم را بر پس‌انداز و سرمایه در دوره t و $t+1$ بیابید. سطح سرمایه در این حالت نسبت به قسمت ب بیشتر است یا کمتر؟ آیا این اصلاح در زمان t حمایت سیاسی جامعه را بدست خواهد آورد؟ به تغییر در سطح رفاه جوانان و کهنسالان در این دوره توجه کنید.

(د) قسمت قبل را برای حالت حدی $\gamma = 1$ تکرار کنید.

(الف) با استفاده از روابط، و فرض کردن اینکه سهم نیروی کار و سرمایه هر بنگاه در تعادل از کل اقتصاد ثابت است داریم:

$$Y_t^i = A(K_t^i)^\alpha (K_t N_t^i)^{1-\alpha}$$

$$\text{assuming } N_t = 1 = n^i N_t^i$$

$$\text{assuming } k_t = n^i k_t^i$$

$$\frac{\delta Y_t^i}{\delta N_t^i} = w_t = (1-\alpha)AK_t \overbrace{(K_t^i)^\alpha (K_t N_t^i)^{-\alpha}}^{=1} \Rightarrow \boxed{w_t = (1-\alpha)AK_t}$$

$$\frac{\delta Y_t^i}{\delta K_t^i} = r_t = \alpha A \overbrace{(K_t^i)^{\alpha-1} (K_t N_t^i)^{1-\alpha}}^{=1} \Rightarrow \Rightarrow \boxed{r^K = \alpha A}$$

مشاهده می‌شود که نرخ بهره تنها به بهره‌وری اقتصاد ارتباط دارد.

ب) در این اقتصاد، افراد به دنبال حداکثر ساختن تابع مطلوبیت خود با توجه به قیود موجود در دوره های جوانی و کهنسالی هستند:

$$\max : U_t = \ln c_t^y + \frac{1}{1+\rho} \ln c_{t+1}^o$$

s.t :

$$l_t = 1$$

$$[1]: P_t c_t^y + a_t + i_t + T_G = w_t l_t$$

$$[2]: P_{t+1} c_{t+1}^o = S_G + (1+r_{t+1}^b) a_t + (1+r_{t+1}^K - \delta) i_t$$

where :

$$k_{t+1} = i_t + (1-\delta) k_t$$

$$T_G = S_G = d$$

محدودیت ۱، قید بودجه در دوره جوانی است. فرد در جوانی تماماً کار می کند، پس از مالیات، بخشی را مصرف، و بخشی را در اوراق بدهی یا کالای سرمایه ای، سرمایه گذاری می کند. در پیری، محدودیت ۲، فرد از دولت یارانه S_G و سود سرمایه گذاری های خود را دریافت کرده و مصرف می کند، داریم:

$$\frac{P_{t+1}}{P_t} = 1 + \pi_{t+1}, l_t = 1$$

$$\frac{1}{1+\rho} = \beta$$

$$[L]: \ln c_t^y + \beta \ln c_{t+1}^o + \lambda \{w_t - P_t c_t^y - a_t - i_t - d\} + \eta \{d + (1+r_{t+1}^b) a_t + (1+r_{t+1}^K - \delta) i_t - P_{t+1} c_{t+1}^o\}$$

$$\left. \begin{aligned} [c_t^y]: \frac{1}{c_t^y} - \lambda P_t &= 0 \\ [c_{t+1}^o]: \beta \frac{1}{c_{t+1}^o} - \eta P_{t+1} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\lambda}{\eta} = \frac{P_{t+1} \frac{1}{c_t^y}}{\beta P_t \frac{1}{c_{t+1}^o}} \xrightarrow{P_t = P_{t+1}} \frac{c_{t+1}^o}{c_t^y} = \beta \frac{1+r_{t+1}^K - \delta}{1+\pi_{t+1}} = \beta \frac{1+r_{t+1}^b}{1+\pi_{t+1}}$$

$$[i_t]: -\lambda + \eta(1+r_{t+1}^K - \delta) = 0 \Rightarrow \frac{\lambda}{\eta} = 1+r_{t+1}^K - \delta$$

$$[a_t]: -\lambda + \eta(1+r_{t+1}^b) = 0 \Rightarrow \frac{\lambda}{\eta} = 1+r_{t+1}^b$$

$$1+r_{t+1}^K - \delta = 1+r_{t+1}^b \Rightarrow \boxed{r_{t+1}^b = \alpha A - \delta}$$

...

در این قسمت، فرض می شود که اوراق بدهی وجود نداشته و افراد تنها در کالای سرمایه ای سرمایه گذاری می کنند. در واقع چون در تعادل نرخ بازده اوراق بدهی باید برابر سود پس از استهلاك کالای سرمایه ای باشد، این دو نوع سرمایه گذاری از دید خانوار تفاوتی با یک دیگر نخواهند داشت. در این قسمت فرض می شود که سرمایه گذاری از طریق اوراق نداریم:

$$\max_{i_t} \ln\left(\frac{w_t - i_t - T_G}{P_t}\right) + \beta \ln\left(\frac{S_G + (1 + r_{t+1}^K - \delta)i_t}{P_{t+1}}\right)$$

F.O.C :

$$-\frac{1}{w_t - i_t - T_G} + \beta \frac{(1 + r_{t+1}^K - \delta)}{S_G + (1 + r_{t+1}^K - \delta)i_t} = 0 \Rightarrow \boxed{i_t = \frac{w_t}{2 + \rho} - d \frac{2 + r_{t+1}^K + \rho - \delta}{(1 + r_{t+1}^K - \delta)(2 + \rho)}}$$

در صورتی که فرض شود، $k_{t+1} = i_t$ ، سطح سرمایه به صورت زیر است:

$$k_{t+1} = \frac{(1 - \alpha)Ak_t}{2 + \rho} - d \frac{2 + \alpha A + \rho}{(1 + \alpha A)(2 + \rho)}$$

سطح تعادلی سرمایه:

$$k^* = d \frac{2 + \alpha A + \rho}{(1 + \alpha A)((1 - \alpha)A - (2 + \rho))}$$

(ج) در این صورت، مسئله جوانان در زمان t مشابه زیر خواهد شد:

$$\max_{i_t} \ln\left(\frac{w_t - i_t - \gamma d}{P_t}\right) + \frac{1}{1 + \rho} \ln\left(\frac{(1 + r_{t+1}^a)i_t}{P_{t+1}}\right)$$

F.O.C :

$$-\frac{1}{w_t - i_t - \gamma d} + \frac{1}{1 + \rho} \frac{1}{i_t} = 0 \Rightarrow \boxed{i_t = \frac{w_t - \gamma d}{2 + \rho}}$$

و در زمان t+1 به صورت زیر خواهد بود:

$$\max_{i_{t+1}} \ln\left(\frac{w_{t+1} - i_{t+1} - (1 - \gamma)dr_{t+1}^a}{P_{t+1}}\right) + \frac{1}{1 + \rho} \ln\left(\frac{(1 + r_{t+2}^a)i_{t+1}}{P_{t+2}}\right)$$

F.O.C :

$$-\frac{1}{w_{t+1} - i_{t+1} - (1 - \gamma)dr_{t+1}^a} + \frac{1}{1 + \rho} \frac{1}{i_{t+1}} = 0 \Rightarrow \boxed{i_{t+1} = \frac{w_{t+1} - (1 - \gamma)dr_{t+1}^a}{2 + \rho}}$$

for $\gamma = 0$:

$$\begin{cases} i_t = \frac{w_t}{2 + \rho} \\ i_{t+1} = \frac{w_{t+1} - dr_{t+1}^a}{2 + \rho} \end{cases}$$

مشاهده می‌شود که سرمایه گذاری جوانان در زمان t و پس از آن افزایش می‌یابد. سطح سرمایه در t و t+1 به صورت زیر است:

$$k_{t+1} = s_t - a_{t+1} = \frac{w_t}{2 + \rho} - d$$

$$k_{t+2} = \frac{w_{t+1} - dr_{t+1}^a}{2 + \rho} - d$$

در مقایسه با سطوح سرمایه در قسمت قبل، سطح سرمایه در نتیجه تولید و رفاه کاهش می‌یابد.

for $\gamma = 1$:

$$\begin{cases} i_t = \frac{w_t - d}{2 + \rho} \\ i_{t+1} = \frac{w_{t+1}}{2 + \rho} \end{cases}$$

مشاهده می‌شود که با این تغییر، اقتصاد از حالت پایدار خارج می‌شود، با سطح سرمایه سرانه پایین تر، نرخ سرمایه گذاری جوانان افزایش می‌یابد. پس میزان مصرف افت خواهد داشت ولی با نرخ ثابت رشد اقتصاد تا حالت تعادل رشد خواهد کرد.

سوال ۵. در مثال‌های این فصل و مسائل فوق، پول توسط دولت منتشر می‌شود. در این مسئله می‌خواهیم اجازه دهیم پول در قالب پول مجازی (کریپتوکارنسی) توسط افراد خصوصی منتشر شود. الگوی نسل‌های هم‌پوش را در نظر بگیرید که هر فرد دو دوره زنده است و جمعیت هر نسل برابر واحد است. تابع مطلوبیت افراد برابر $\ln(c_t^y) + \ln(c_{t+1}^o)$ است. هر جوان به میزان y موهبت داشته ولی در کهن‌سالی موهبتی ندارد. اولین کهن‌سال دارای M_t واحد پول است و موهبت دیگری ندارد. افراد جوان می‌توانند یک واحد پول مجازی را به قیمت q_t بخرند و یا برای انتشار پول جدید به میزان T_t برابر با $\Gamma(M_t, T_t)$ از موهبت خود هزینه کنند. بنابراین انتشار پول توسط اشخاص خصوصی هزینه دارد. در این مسئله M_t برابر کل مانده و موجودی پول در جامعه مشتمل بر پولی است که جوانان همین دوره ضرب می‌کنند. این معادله مشابه ایده بیت‌کوین است که هرچه پول مجازی در جامعه بیشتر باشد، هزینه تولید پول جدید بالاتر است. بنابراین $\Gamma(x, y)$ اکیدا صعودی و اکیدا محدب در هر دو نهاده و بطور خاص $\frac{\partial \Gamma}{\partial x \partial y} > 0$ است. پولی که در این دوره ضرب می‌شود در همین دوره و بالا فاصله با قیمت q_t می‌تواند در بازار فروخته شود. در هر دوره برخی از پول مجازی امحا می‌شود و بنابراین به میزان δ از پول مجازی مستهلک شده و در دوره بعد کاسته می‌شود. این قاعده معمولاً دزدی پول‌های مجازی است که گزارش شده و از چرخه خارج شده است.

۱. مسئله بهینه‌سازی خانوار جوان را بنویسید.

۲. شرط مرتبه اول نسبت به T_t را بدست آورید و آن را تفسیر کنید.

۳. فرض کنید تعادلی وجود داشته باشد که پول مجازی با نرخ γ در این اقتصاد رشد کند، به نحویکه ارزش حقیقی پول به صورت $q_t M_t$ در طول زمان ثابت بماند. نشان دهید در این تعادل اگر وجود داشته باشد لازم است $\gamma = 1$ باشد. آیا این نتیجه به این معنی است که پول مجازی ثبات در نظام پولی را به همراه دارد؟

الف) مسئله خانوار در این اقتصاد به شرح زیر است:

محدودیت ۱، قید بودجه افراد جوان در جامعه است. این افراد دارای موهبت y_t بوده و می‌توانند با هزینه کردن (تابع گاما)، مقداری پول جدید خلق کنند، و آن را بفروشند، یا می‌توانند مقداری پول را خریداری کنند. این میزان پول خریداری شده را در کهن سالی خود برای مصرف استفاده خواهند کرد. قید ۲

$$\max \{ \ln c_t^y + \ln c_{t+1}^o \}$$

s.t.:

$$[1]: P_t c_t^y + \Gamma(M_t, T_t) + m_t q_t = P_t y_t + T_t q_t$$

$$[2]: P_{t+1} c_{t+1}^o = m_t q_{t+1}$$

where:

$$M_{t+1} = (1 - \delta) M_t + T_t$$

تسویه بازار ها در این اقتصاد به صورت تسویه بازار های کالا و پول در دو دوره است:

$$\text{goods Market: } c_t^y + c_t^o = y_t$$

$$\text{money Market: } P_t (y_t - c_t^y) = q_t M_t$$

ب) حل مسئله به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 [l]: & \ln c_t^y + \ln c_{t+1}^o + \lambda \{P_t y_t + T_t q_t - P_t c_t^y - \Gamma(M_t, T_t) - m_t q_t\} + \eta \{m_t q_{t+1} - P_{t+1} c_{t+1}^o\} \\
 [c_t^y]: & \frac{1}{c_t^y} - \lambda P_t = 0 \\
 [c_{t+1}^o]: & \frac{1}{c_{t+1}^o} - \eta P_{t+1} = 0
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} [l]: \\ [c_t^y]: \\ [c_{t+1}^o]: \end{aligned}} \right\} \rightarrow \frac{\lambda}{\eta} = \frac{P_{t+1} c_{t+1}^o}{P_t c_t^y}$$

$$[T_t]: q_t - \Gamma'_{T_t}(M_t, T_t) \Gamma(M_t, T_t) = 0$$

$$[m_t]: -\lambda q_t + \eta q_{t+1} = 0 \Rightarrow \frac{\lambda}{\eta} = \frac{q_{t+1}}{q_t}$$

$$\Rightarrow \frac{q_{t+1}}{q_t} = \frac{\Gamma'_{T_{t+1}}(M_{t+1}, T_{t+1}) \Gamma(M_{t+1}, T_{t+1})}{\Gamma'_{T_t}(M_t, T_t) \Gamma(M_t, T_t)} = \frac{P_{t+1} c_{t+1}^o}{P_t c_t^y}$$

$[A]: \frac{c_{t+1}^o}{c_t^y} = \frac{P_{t+1}}{P_t} \frac{q_{t+1}}{q_t}$

$[B]: \frac{\Gamma'_{T_{t+1}}(M_{t+1}, T_{t+1}) \Gamma(M_{t+1}, T_{t+1})}{\Gamma'_{T_t}(M_t, T_t) \Gamma(M_t, T_t)} = \frac{q_{t+1}}{q_t}$

طبق روابط بدست آمده، میزان مصرف در دو دوره، متناسب با قیمت حقیقی (قدرت خرید) ارز های دیجیتال است. همچنین قیمت اسمی ارز های دیجیتال برابر با هزینه حاشیه ای استخراج آنها است. (طبق شرط مرتبه اول نسبت به T_t)

ج) در صورتی که ارزش حقیقی پول در طول زمان ثابت بماند (ارزش اسمی کاهش بیابد اما مقدار پول دست آحاد افزایش یابد)، داریم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_{t+1}}{M_t} &= \gamma \\ M_{t+1} q_{t+1} &= M_t q_t \\ M_t q_t &= P_t (y_t - c_t^y) \\ in ss: \frac{c_{t+1}^o}{c_t^o} &= \frac{c_{t+1}^y}{c_t^y} = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{q_{t+1}}{q_t} &= \frac{1}{\gamma} \\ \frac{P_t}{P_{t+1}} &= 1 \end{aligned} \right.$$

$$if: \frac{\bar{c}_o}{\bar{c}_y} = \frac{P_{t+1}}{P_t} = \frac{q_t}{P_{t+1}} = \frac{1}{\gamma} = 1 \Rightarrow \gamma = 1$$

مشاهده می شود، در صورتی که رشد میزان پول نداشته باشیم، به تعادل دلخواه می رسیم، ارز های دیجیتال به دلیل محدودیت در استخراج، در صورت پذیرش شاید بتوانند به ثبات در بازار پولی منجر شوند!